

L'ETUDE DE L'EQUATION $du/d\tau = A(\tau)u$ POUR CERTAINES CLASSES D'OPERATEURS NON BORNES DE L'ESPACE DE HILBERT

PAR

C. FOIAȘ, GH. GUSSI ET V. POENARU

1. Il y a de belles recherches relatives à l'équation stationnaire $du/d\tau = Au$ où A est un opérateur fermé non borné à domaine dense dans un espace de Banach.

Mais les équations non stationnaires sont encore relativement peu connues. Dans ce travail nous nous proposons d'étudier ce cas. Bien entendu nous avons dû renoncer à toute la généralité du problème. D'une part nous considérons seulement des espaces de Hilbert (bien que certains des résultats soient encore vrais dans les espaces de Banach) d'autre part nous supposons que les opérateurs fermés $A(\tau)$ ($\tau \in (a, b)$) vérifient

L'HYPOTHÈSE 1. *Il existe une suite $\{H_n, 1 \leq n < \infty\}$ de sous-espaces linéaires fermés de l'espace de Hilbert H , vérifiant les conditions:*

- (i) $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$;
- (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ est dense dans H ;
- (iii) $H_n \subset \mathfrak{D}_{A^*(\tau)}$, $A^*(\tau)(H_n) \subset H_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\tau \in (a, b)$;
- (iv) $A^*(\tau)$ est borné et continu en norme dans H_n , $n = 1, 2, \dots$.

En considérant le dual $\mathfrak{X}'$ de l'espace $\mathfrak{X}$, limite inductive des espaces H_n [1], nous prolongeons les opérateurs $A(\tau)$ à des opérateurs continus dans $\mathfrak{X}'$. L'utilisation de l'espace $\mathfrak{X}'$ est justifiée par le Théorème 2. Après cela on résout l'équation considérée dans $\mathfrak{X}'$. En utilisant toujours les relations entre les topologies de H et de $\mathfrak{X}'$, nous donnons une condition pour que la solution (qui en général appartient à $\mathfrak{X}'$) appartienne à H , lorsque la donnée initiale appartient à H . Toutes ces conditions portent sur les $A^*(\tau)$. Dans le point suivant nous imposons aux $A(\tau)$ des conditions qui impliquent pour $A^*(\tau)$ les propriétés déjà citées. Par exemple la condition est toujours remplie quand les opérateurs ont comme ensemble spectral d'après v. Neumann [2] le demiplan gauche. Comme on le verra par la suite dans ce cas la solution de l'équation considérée dans $\mathfrak{X}'$ apparaît, pour les données initiales appartenant à H , comme la solution généralisée obtenue par continuité de l'équation considérée dans H .

Nous donnons aussi une condition pour que la dérivation soit faite au sens de la topologie faible de H et pour que la solution appartienne à $\mathfrak{D}_{A(\tau)}$, quelle que soit la donnée initiale appartenant à H .

Received by the editors August 1, 1956.

Comme application nous considérons l'équation

$$\frac{du}{d\tau} = B(\tau)Au \text{ où: } B(\tau)A \subseteq AB(\tau), \quad 0 < cI \leq B(\tau), B(\tau)$$

continu en norme, A étant supposé tel, que: (i) il y a une suite de courbes de Jordan, tendant vers l'infini, contenues toutes dans l'ensemble résolvant de A , et tel que les projections attachées aux ensembles spectraux de A d'après Dunford [3] compris dans chaque courbe jordanienne, convergent vers la transformation identique, ou bien (ii) A est un opérateur normal.

De nombreux opérateurs différentiels rentrent dans ces deux classes.

2. Soit H un espace de Hilbert et supposons en outre qu'on a défini dans H , une involution J : comme dans les espaces de fonctions auxquels s'applique la théorie générale, cette involution J sera donnée par la conjugaison usuelle; cela n'entraîne pas de grandes restrictions.

Soit $K_n = J(H_n)$. Evidemment $K_n \subset K_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, et $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ est dense dans H , car J est une opération continue et $P_{H_n} \rightarrow I$ implique $P_{K_n} = JP_{H_n}J \rightarrow I$. Soit $\mathfrak{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ et munissons $\mathfrak{K}$ de la topologie limite inductive des espaces K_n ; $\mathfrak{K}$ sera complet et aura la propriété (M)⁽¹⁾. Donc son dual sera complet.

La topologie de son dual $\mathfrak{K}'$ est donnée par le système fondamental de semi-normes:

$$P_S(x) = \sup_{x \in S} |x'(x)|$$

(S étant une sphère dans K_n). Comme $\mathfrak{K}$ est limite inductive d'espaces normés (en fait des espaces de Hilbert) $\mathfrak{K}'$ sera métrisable, ce qui nous permet de remplacer les filtres par des suites dans les considérations de continuité. Dans ce qui suit nous employerons aussi le fait que $x' \in \mathfrak{K}'$ si et seulement si la restriction x'_{K_n} de x' à K_n est continue dans K_n pour chaque n [1].

A chaque élément $\xi \in H$ on peut faire correspondre un élément $x'_\xi \in \mathfrak{K}'$ par

$$x'_\xi(x) = \langle x, J\xi \rangle = \langle \xi, Jx \rangle \quad x \in \mathfrak{K}.$$

Cette forme linéaire est continue dans $\mathfrak{K}$ car elle est continue dans chaque K_n . La correspondance ainsi établie est un isomorphisme algébrique de H dans un sous-espace linéaire $\mathfrak{K}'(H)$ de $\mathfrak{K}'$, ce qui résulte des propriétés du produit scalaire, de l'involution J et du fait que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ est dense dans H .

Etudions maintenant les relations topologiques entre H et $\mathfrak{K}'(H)$. Pour cela remarquons que si $S(m, R)$ est la sphère de K_m à rayon R , et de centre 0, on a:

⁽¹⁾ Nous désignons par la propriété (M) la propriété énoncée dans la Prop. 6 de [1], c'est-à-dire: Une forme linéaire est continue si et seulement si elle transforme tout ensemble borné en un ensemble borné.

$$P_{S(m,R)}(x'_\xi) = \sup_{x \in S(m,R)} |\langle x, J\xi \rangle| = \sup |\langle \xi, x \rangle|, \quad \|x\| \leq R, x \in H_m,$$

donc

$$(1) \quad P_{S(m,R)}(x'_\xi) = R \|P_{H_m} \xi\|.$$

Cette dernière relation montre que l'application $\xi \rightarrow x'_\xi$ est continue de H à $\mathfrak{X}'(H)$; en plus elle nous montre que $x'_{\xi_n} \rightarrow x'_\xi$ dans $\mathfrak{X}'$ signifie que $P_{H_m} \xi_n \rightarrow P_{H_m} \xi$ pour chaque m , dans H , d'où (en utilisant que $P_{H_m} \rightarrow I$), $x'_{\xi_n} \rightarrow x'_\xi$ dans $\mathfrak{X}'$ implique la convergence faible de $\{\xi_n\}$ vers ξ dans H si et seulement si $\{\|\xi_n\|\}$ est bornée.

Voici maintenant un théorème de représentation des formes linéaires continues sur $\mathfrak{X}$.

THÉORÈME 1. *A chaque forme linéaire continue $x' \in \mathfrak{X}'$ on peut faire correspondre d'une façon unique, une suite $\{\xi_m\}$ ayant les propriétés*

(i) $\xi_m \in H_m$, $m = 1, 2, \dots$,

(ii) $P_{H_m} \xi_n = \xi_m$ pour $m \leq n$,

et réciproquement; la condition nécessaire et suffisante pour que $x' = x'_\xi$, $\xi \in H$ et que la suite $\{\|\xi_n\|\}$ soit bornée.

Démonstration. Posons

$$x'(x) = \langle x, J\xi_n \rangle$$

pour $x \in K_n$; d'après (i) et (ii), x' est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{X}$. Réciproquement, d'après le théorème de représentation des formes linéaires continues sur un espace de Hilbert on a $x'_{K_n}(x) = \langle x, \eta_n \rangle$ pour $x \in K_n$ et $\eta_n \in K_n$; en posant $\xi_n = J\eta_n$, on a

$$(2) \quad x'_{K_n}(x) = \langle x, J\xi_n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots,$$

d'où, de l'unité de $J\xi_n = \eta_n$, nous avons (ii). c.q.f.d. Maintenant, si $x' = x'_\xi$ on a $\xi_m = P_{H_m} \xi$ et donc $\|\xi_m\| \leq \|\xi\|$. D'autre part, si $\|\xi_n\| \leq M$, comme $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_{n+1} - \xi_n\|^2 \leq M$, car $\langle \xi_{n+1} - \xi_n, \xi_{m+1} - \xi_m \rangle = 0$ pour $n \neq m$, nous avons que $\|\xi_{n+p} - \xi_n\|^2 = \sum_{i=1}^p \|\xi_{n+i} - \xi_{n+i-1}\|^2 \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, donc il y a un ξ , $\xi = \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m$. Evidemment $x'(x) = \langle x, J\xi \rangle$, $x \in \mathfrak{X}$.

La relation (2) donne immédiatement

$$(3) \quad P_{S(m,R)}(x') = R \|\xi_m\|$$

ce qui montre que $x'(k) \rightarrow x'$ pour $k \rightarrow \infty$ dans $\mathfrak{X}'$ si et seulement si $\xi_m(k) \rightarrow \xi_m$, ($k \rightarrow \infty$) pour chaque m , dans H . Cette observation montre que $\mathfrak{X}'(H)$ est dense dans $\mathfrak{X}'$ et que nous avons même $x'_{\xi_m} \rightarrow x'$ pour $m \rightarrow \infty$.

3. Le premier problème qui se pose est de prolonger $A(\tau)$ à un opérateur continu sur $\mathfrak{X}'$. Pour cela il faut remarquer que si $\xi \in \mathfrak{D}_{A(\tau)}$ alors, du fait que $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \subset \mathfrak{D}_{A^*(\tau)}$ nous avons pour chaque $x \in \mathfrak{X}$ $x'_{A(\tau)\xi}(x) = x'_\xi(JA^*(\tau)Jx)$. Remarquons que $JA^*(\tau)J$ est un opérateur linéaire borné de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$ et

donc $x'(JA^*(\tau)Jx)$ est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{X}$, car $\mathfrak{X}$ a la propriété (M). Posons

$$(4) \quad A(\tau)x'(x) = x'(JA^*(\tau)Jx).$$

$A(\tau)$ est évidemment une application linéaire continue de $\mathfrak{X}'$ à $\mathfrak{X}'$. D'après ce que nous avons remarqué ci-dessus on a $A(\tau)x'_\xi = x'_{A(\tau)\xi}$ pour $\xi \in \mathfrak{D}_{A(\tau)}$ ce qui justifie le fait que $A(\tau)$ considéré dans $\mathfrak{X}'$ est l'extension de $A(\tau)$ défini sur $\mathfrak{D}_{A(\tau)}$.

Cette extension est possible d'ailleurs pour tout opérateur A qui satisfait les propriétés (i), (ii), (iii) et dont l'adjoint A^* est borné sur chaque H_m .

Dans ce qui suit nous avons besoin du

LEMME 1. *Si x' est représenté par $\{\xi_m\}$ alors Ax' sera représenté par $\{A_m^{**}\xi_m\}$ où A_m^{**} est l'adjoint de A^* dans H_m et A_m^{**} est la restriction de A_n^{**} à H_m pour tout $n \geq m$.*

La démonstration est immédiate.

L'utilisation de l'espace $\mathfrak{X}'$, considéré comme dual topologique de $\mathfrak{X}$ est justifiée par le

THÉORÈME 2. *Soit $\mathfrak{Y}$ un espace vectoriel topologique localement convexe complet, tel que:*

- (1) $H \subset \mathfrak{Y}$ et H est dense dans $\mathfrak{Y}$;
- (2) la topologie induite par $\mathfrak{Y}$ sur H est moins fine que la topologie d'espace Hilbertien de H .
- (3) Quel que soit l'opérateur A satisfaisant les propriétés (i), (ii), (iii) de l'hypothèse 1 et tel que A^* soit borné dans chaque H_n peut être prolongé à un opérateur continu de $\mathfrak{Y}$ à $\mathfrak{Y}$ qui est aussi continu de H à $\mathfrak{Y}$. Alors $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{Y}$ en tant qu'espaces vectoriels non topologiques et la topologie de $\mathfrak{X}'$ est plus fine que celle induite par $\mathfrak{Y}$ sur $\mathfrak{X}'$.

Démonstration. En utilisant les résultats du point antérieur et le Lemme 1 on voit facilement que $\mathfrak{X}'$ satisfait les conditions (1), (2), (3). Maintenant soit $\{\xi_m\}$ une représentation d'un élément de $\mathfrak{X}'$. Alors, si p est une semi-norme appartenant à la famille de semi-normes définissant la topologie de $\mathfrak{Y}$ on trouve un m tel que: $p(\xi_m) = p(\xi_{m+k})$, $k \geq 1$; en effet si on supposait le contraire on trouverait une suite $\{m_k; 1 \leq k < \infty\}$ telle que $m_1 \leq m_2 \leq \dots$ et que $p(\xi_{m_1}) \neq p(\xi_{m_2}) \neq \dots$. Si on considère les espaces $L_k = H_{m_{k+1}} \oplus H_{m_k}$ on peut définir aisément une transformation A autoadjointe qui, sur chacun de ses espaces se réduit à une transformation symétrique bornée et qui satisfait la condition

$$A(\xi_{m_{k+1}} - \xi_{m_k}) = \frac{n\|\xi_{m_{k+1}} - \xi_{m_k}\|}{p(\xi_{m_{k+1}} - \xi_{m_k})} (\xi_{m_{k+1}} - \xi_{m_k}).$$

D'ici on trouve immédiatement une contradiction de la condition (3).

Donc la suite $\{\xi_m\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{Y}$; comme $\mathcal{Y}$ est complet, il y a un élément $y \in \mathcal{Y}$ tel que $y = \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m$. On a ainsi défini une application linéaire de $\mathcal{X}'$ dans $\mathcal{Y}$. Comme, d'autre part $P_{H_m} \xi_n = \xi_m$ et comme P_{H_m} peut être prolongé dans $\mathcal{Y}$ par continuité d'une façon unique, on a que $P_{H_m} y = \xi_m$ ce qui montre que l'application est biunivoque. On peut donc considérer $\mathcal{X}'$ plongé dans $\mathcal{Y}$.

En raisonnant comme auparavant, on obtient que pour chaque semi-norme p appartenant à la famille de semi-normes qui définit la topologie de $\mathcal{Y}$ correspond un n tel que $p(\xi) = 0$ pour chaque $\xi \in H_{n+k} \ominus H_n$, $k = 1, 2, \dots$, ce qui montre que la topologie induite sur $\mathcal{X}'$ par $\mathcal{Y}$ est moins fine que la topologie de $\mathcal{X}'$.

Le second problème qui se pose est celui de voir ce qui arrive si on change, pour un opérateur A , la suite d'espaces $\{H_n; 1 \leq n < \infty\}$ par une autre suite $\{^*H_n; 1 \leq n < \infty\}$, ayant les mêmes propriétés.

Ce problème est résolu par le

THÉORÈME 3. *Si en plus des propriétés de l'hypothèse 1, $\{H_n\}$ a la propriété que tout sous-espace linéaire fermé de H , invariant pour A^* et sur lequel A^* est borné, est contenu dans un des H_n alors, si $\{^*H_n\}$ est une autre suite d'espaces vérifiant les conditions de l'hypothèse 1, pour A et si l'on désigne par $^*\mathcal{X}'$ le dual de $^*\mathcal{X}$, $^*\mathcal{X}$ étant la limite inductive des espaces *H_n , il y a une application linéaire continue de $\mathcal{X}'$ dans $^*\mathcal{X}'$ telle que les éléments de $\mathcal{X}'(H)$ et $^*\mathcal{X}'(H)$ se correspondent d'une manière biunivoque, H restant invariant.*

OBSERVATIONS. (1) La condition en plus demandée à l'opérateur A , et donc aussi aux opérateurs $A(\tau)$ est vérifiée dans les exemples que nous donnerons. Les résultats obtenus demeurent vrais même sans cette condition supplémentaire, mais $\mathcal{X}'$ perd son rôle privilégié. (2) Le théorème montre que la topologie induite sur H par $\mathcal{X}'$ est la plus fine topologie de ce type (dual d'espace limite inductive d'une suite de sous-espaces vérifiant les conditions (i), (ii), (iii), et (iv) relatives à A) pour laquelle A est continu de H , muni de sa topologie d'espace de Hilbert, à H , muni de la topologie induite par $\mathcal{X}'$.

Démonstration du Théorème 3. Tout d'abord nous allons faire correspondre à chaque élément $x'_\xi \in \mathcal{X}'$ l'élément $^*x'_\xi \in ^*\mathcal{X}'$ ($\xi \in H$). Comme pour chaque *H_m il y a un H_n , $H_n \supset ^*H_m$ on aura: $\|P_{^*H_m} \xi\| \leq \|P_{H_n} \xi\|$ et donc pour toute suite de Cauchy de $\mathcal{X}'(H)$ la suite correspondante de $^*\mathcal{X}'(H)$ est aussi suite de Cauchy dans $^*\mathcal{X}'$. Mais $\mathcal{X}'(H)$ est dense dans $\mathcal{X}'$; nous obtenons donc une application linéaire de $\mathcal{X}'$ dans $^*\mathcal{X}'$. Montrons que cette correspondance est biunivoque pour les éléments de $\mathcal{X}'(H)$; si on suppose le contraire on trouverait un élément $\{\xi_n\} = x'_\xi \in \mathcal{X}'$ qui correspond à 0 dans $^*\mathcal{X}'$. On a: $P_{K_m} \xi_n \rightarrow 0$, donc $P_{K_m} \xi = 0$. Mais $P_{K_m} \xi \rightarrow I$ d'où $x'_\xi = 0$.

Soit $x'(k) = \{\xi_n(k)\}$ une suite d'éléments de l'espace $\mathcal{X}'$ convergent vers 0; alors, comme $^*x'(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} ^*x'_{\xi_n(k)}$ dans $^*\mathcal{X}'$ on a que $P_{K_m} x'(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{K_m} \xi_n(k)$ et d'après la supposition faite on a en plus $P_{K_m} x'(k) = P_{K_m} \xi_{n_0}(k) \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$, donc $^*x'(k) \rightarrow 0$, dans $^*\mathcal{X}'$.

Le troisième problème qui se pose relativement à l'espace $\mathfrak{X}'$ est de voir ce qui se passe quand on remplace J par une autre involution de l'espace H .

Ce problème se résout aisément. Soient J_1 , et J_2 deux involutions quelconques et notons $K_n^{(i)} = J_i(H)$ ($i=1, 2$), et $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{(i)} = \mathfrak{X}_i$. Faisons correspondre à tout $x_1 \in \mathfrak{X}_1$ un élément $x_2 \in \mathfrak{X}_2$ si $J_1 x_1 = J_2 x_2$. C'est un isomorphisme algébrique qui, en outre, établit une correspondance entre $S_1(m, R)$ et $S_2(m, R)$ où $S_i(m, R)$ sont les sphères de rayon R , centre 0, dans $K_m^{(i)}$. Posons $x'_1 \leftrightarrow x'_2$ si $x'_1(x_1) = x'_2(x_2)$ pour tout $x_1 \leftrightarrow x_2$ ($x_i \in \mathfrak{X}_i$). Pour montrer qu'on a un isomorphisme algébrique, remarquons que $x'_2(x_2) = x'_1(J_1 J_2 x_2)$; comme $\mathfrak{X}_2$ a la propriété (M) on voit que x'_2 est continue. Cette application est linéaire et biunivoque. On a en plus que $x'_1 \leftrightarrow x'_2$ pour chaque $\xi \in H$ et

$$(5) \quad P_{S_1(m, R)}^{(1)}(x'_1) = P_{S_2(m, R)}^{(1)}(x'_2)$$

ce qui montre que l'application est bicontinue.

4. Dans ce point nous nous proposons de résoudre l'équation

$$(6) \quad \frac{du}{d\tau} = A(\tau)u$$

dans $\mathfrak{X}'$. Bien que cela n'intervienne pas dans la démonstration remarquons que la relation

$$P_{S(m, R)}(A(\tau)x' - A(\sigma)x') \leq \|\xi_m\| R \|A_m^*(\tau) - A_m^*(\sigma)\|$$

nous montre que $A(\tau)x'$ est continu dans $\mathfrak{X}'$ pour $\tau \in (a, b)$.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Pour tout $a' \in \mathfrak{X}'$ il y a une solution, et une seule $x'(\tau)$ de l'équation (6) dans $\mathfrak{X}'$, qui satisfait la condition: $x'(c) = a'$, $c \in (a, b)$.*

Démonstration. Soit $x'(\tau) = \{\xi_n(\tau)\}$ une solution de l'équation (6) satisfaisant la condition $x'(c) = a' = \{\alpha_m\}$; alors, d'après le Lemme 1 et de l'observation faite à l'occasion du Théorème 1, cela implique que

$$(7) \quad \frac{d\xi_m(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau' \rightarrow \tau, (\text{dans } H)} \frac{\xi_m(\tau') - \xi_m(\tau)}{\tau' - \tau} = A_m^{**}(\tau)\xi_m(\tau).$$

Comme $A_m^{**}(\tau)$ est continue en norme, l'équation (7) a une seule solution $\xi_m(\tau)$ satisfaisant $\xi_m(c) = \alpha_m \in H_m$; de même il est évident que $\xi_m(\tau)$ dépend continuellement de α_m dans H_m et cela uniformément par rapport à $\tau \in [a_1, b_1] \subset (a, b)$.

Ces remarques permettent de résoudre immédiatement l'équation (6).

En effet soit $a' = \{\alpha_m\}$ et soit $\xi_m(\tau)$ la solution de l'équation (7) pour $\xi_m(c) = \alpha_m$. Montrons que $\{\xi_m(\tau)\}$ a la propriété (ii) (elle a évidemment la propriété (i)). Comme H_m (pour $m \leq n$) réduit $A_n^{**}(\tau)$ nous avons $A_m^{**}(\tau) = A_n^{**}(\tau)P_{H_m} = P_{H_m}A_n^{**}(\tau)$ et donc, si $\xi_n(\tau)$ est la solution de

$$\frac{d\xi_n(\tau)}{d\tau} = A_n^{**}(\tau)\xi_n(\tau), \quad \xi_n(c) = \alpha_n,$$

alors

$$\frac{dP_{H_m}\xi_n(\tau)}{d\tau} = P_{H_m}A_n^{**}(\tau)\xi_n(\tau) = A_m^{**}(\tau)P_{H_m}\xi_n(\tau)$$

ce qui montre que $P_{H_m}\xi_n(\tau)$ satisfait l'équation (7) et que $P_{H_m}\xi_n(c) = P_{H_m}\alpha_n = \alpha_m$. Mais l'unicité des solutions de l'équation (7) nous donne $P_{H_m}\xi_n(\tau) = \xi_m(\tau)$, donc $\{\xi_m(\tau)\}$ définit une forme linéaire continue $x'(\tau) \in \mathfrak{X}'$. Toujours d'après le lemme 1 et de la même observation déjà citée, il en résulte que $x'(\tau) = \{\xi_n(\tau)\}$ satisfait l'équation (6) et que cette équation a une seule solution $x'(\tau) \in \mathfrak{X}'$ satisfaisant $x'(c) = a'$. D'après ce que nous avons remarqué sur l'équation (7) on voit sans peine que $x'(\tau)$ dépend continuellement dans $\mathfrak{X}'$ de a' , et cela uniformément par rapport à $\tau \in [a_1, b_1] \subset (a, b)$.

La topologie de H étant plus fine que celle de $\mathfrak{X}'(H)$ si nous avons une solution de l'équation $d\xi/d\tau = A(\tau)\xi$ dans H satisfaisant $\xi(c) = \alpha$, alors $x'_\xi(\tau)$ sera une solution de l'équation (6) dans $\mathfrak{X}'$ et $x'_{\xi(c)} = x'_\alpha$. Ainsi nous avons obtenu un théorème d'unicité des solutions de l'équation, considérée dans H .

Mais en général, si l'on considère la solution $x'(\tau)$ de (6) satisfaisant $x'(c) = x'_\alpha$, $x'(\tau)$ ne sera pas du type $x'_{\xi(\tau)}$. Nous allons donner une condition pour que cela ait lieu pour $\tau \geq c$.

Dans ce but nous utiliserons le

LEMME 2. *Si dans un espace de Hilbert H , $B(\tau)$ est un opérateur borné, continu en norme (par rapport à τ) alors, si $\xi(\tau)$ est la solution de l'équation $d\xi/d\tau = B(\tau)\xi$ satisfaisant $\xi(c) = \alpha$ et si*

$$\operatorname{Re} \langle B(\tau)x, x \rangle \leq \mu(\tau) \|x\|^2,$$

$\mu(\tau)$ étant sommable, on a pour $\tau \geq c$:

$$(8) \quad \|\xi(\tau)\| \leq \exp \left(\int_c^\tau \mu(s) ds \right) \|\alpha\|.$$

La démonstration de ce lemme est immédiate en utilisant la continuité en norme de $B(\tau)$ et en remarquant que l'ensemble $\operatorname{Re} \lambda \leq \mu(\tau)$ est un ensemble spectral d'après J. von Neumann [2] de $B(\tau)$.

Pour résoudre le problème que nous nous sommes posé, supposons que $A^*(\tau)$ satisfait, en outre, à

L'HYPOTHÈSE 2.

$$(9) \quad \operatorname{Re} \langle A^*(\tau)\xi, \xi \rangle \leq \mu(\tau) \|\xi\|^2, \quad \xi \in \mathfrak{X}$$

où $\mu(\tau)$ est sommable sur tout $[a_1, b_1] \subset (a, b)$.

On a le

THÉORÈME 5. Si $A(\tau)$ satisfait aussi l'hypothèse 2, alors la solution $x'(\tau)$ de l'équation (6) vérifiant $x'(c) = x'_\alpha$, sera du type $x'_{\xi(\tau)}$, pour $\tau \geq c$.

Pour voir cela il suffit de montrer que $\{\|\xi_n(\tau)\|\}$ est bornée. Or, d'après le Lemme 2 nous avons que

$$\|\xi_n(\tau)\| \leq \exp\left(\int_c^\tau \mu(s)ds\right) \|\alpha_n\| \leq \exp\left(\int_c^\tau \mu(s)ds\right) \|\alpha\|.$$

Comme, dans ces conditions $\{\xi_n(\tau)\} = x'_{\xi(\tau)}$ où $\xi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\tau)$ on a

$$(10) \quad \|\xi(\tau)\| \leq \exp\left(\int_c^\tau \mu(s)ds\right) \|\alpha\|, \quad \tau \geq c$$

d'où on a le

COROLLAIRE. Dans les conditions du Théorème 5 le problème est correctement posé pour $\tau \geq c$ dans H , c'est-à-dire que la solution de l'équation (6) pour des données initiales appartenant à H appartient à H et dépend continuellement, dans la topologie de ces données initiales.

5. Les conditions imposées aux points antérieurs à la famille d'opérateurs $\{A(\tau)\}$ concernaient seulement les adjoints $\{A^*(\tau)\}$. Dans ce point nous étudions un cas où ces conditions sont remplies, cas qu'on rencontre dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

THÉORÈME 6. Soit $\{A(\tau)\}$ une famille d'opérateurs fermés, à domaines denses dans H qui satisfont:

(1) Il existe une suite d'idempotents $E_1 \leq E_2 \leq \dots$ ($E_n \leq E_m$ signifie que $E_n E_m = E_m E_n = E_n$) et $E_n \rightarrow I$ pour $n \rightarrow \infty$.

(2) $E_n A(\tau) \subseteq A(\tau) E_n$ pour chaque τ et n .

(3) $A(\tau) E_n$ est borné et continu en norme ($n = 1, 2, \dots$). Dans ce cas les opérateurs $\{A(\tau)\}$ vérifient l'hypothèse 1.

Si $\{A(\tau)\}$ ont en plus aussi la propriété:

$$(4) \quad \operatorname{Re} \langle A(\tau)x, x \rangle \leq \mu(\tau) \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{D}_{A(\tau)},$$

où $\mu(\tau)$ est sommable sur (a, b) , alors ils vérifient aussi l'hypothèse (2).

Démonstration. On voit sans peine que E_n^* est un idempotent, $E_1^* \leq E_2^* \leq \dots$, $E_n^* \rightarrow I$ et que $A(\tau) E_n$ est défini sur tout H . Soit $x \in \mathcal{D}_{A(\tau)}$; on a alors $\langle A(\tau)x, E_n^* y \rangle = \langle x, (A(\tau) E_n)^* y \rangle$ et

$$(11) \quad E_n^* A^*(\tau) \subseteq A^*(\tau) E_n^* = (A(\tau) E_n)^*, \quad n = 1, 2, \dots$$

Cette relation nous montre que $E_n^*(H) \subseteq \mathcal{D}_{A^*(\tau)}$, $A^*(\tau)(E_n^*(H)) \subseteq E_n^*(H)$ et que $A^*(\tau)$ est borné dans $E_n^*(H)$. En plus on a que $A^*(\tau) E_n^*$ est continue en

norme sur $E_n^*(H)$. En posant $H_n = E_n^*(H)$ on voit que l'hypothèse 1 est vérifiée.

Si $\{A(\tau)\}$ a la propriété 4 on a $\operatorname{Re} \langle A(\tau)E_n x, x \rangle \leq M^2 \mu(\tau) \|x\|^2$ pour tout $x \in H$, où $M \geq \|E_n\|$, $n = 1, 2, \dots$. D'ici, en tenant compte de (11) on obtient $\operatorname{Re} \langle A^*(\tau)E_n^* x, x \rangle \leq \mu(\tau) M^2 \|x\|^2$ pour tout $x \in H$, relation dont l'hypothèse 2 est un cas particulier. c.q.f.d.

En conséquence toutes les conclusions des paragraphes antérieurs restent valables pour le cas ici considéré. Donc l'équation (6) a une seule solution, qui, pour une donnée initiale appartenant à H appartient aussi à H et dépend continuellement de la donnée initiale.

D'autre part, l'équation $d\xi(\tau)/d\tau = A(\tau)\xi(\tau)$ considérée dans H a une solution pour chaque donnée initiale $\alpha \in E_n(H)$ car dans ce cas on résout l'équation dans $E_n(H)$ où $A(\tau)$ est un opérateur borné et continu en norme par rapport à τ .

Donc, l'équation considérée a des solutions proprement dites pour des données initiales appartenant à un ensemble dense dans H .

Comme ces solutions sont des solutions de l'équation (6), il résulte qu'elles dépendent continuellement de ces données d'où l'on voit que chaque solution de l'équation (6) peut être considérée comme solution généralisée de l'équation $d\xi(\tau)/d\tau = A(\tau)\xi(\tau)$ (la solution généralisée étant prise au sens de Sobolev [5]). D'une façon plus précise on a le

THÉORÈME 7. *Si les opérateurs $A(\tau)$, $\tau \in (a, b)$ ont les propriétés (1), (2), (3), (4) du Théorème 6, alors l'équations dans H*

$$(12) \quad \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = A(\tau)\xi(\tau)$$

a, pour $\tau \geq c$, une seule solution généralisée, $\xi(c) = \xi$, qui dépend d'une manière continue de la donnée initiale.

REMARQUE. La terme de solution généralisée donné à $\xi(\tau)$ où $x'_{\xi(\tau)}$ est la solution de (6) est justifiée par les faits suivants: (i) Si $\xi(\tau)$ est une solution de (12) alors $x'_{\xi(\tau)}$ est une solution de (6). (ii) l'équation (12) a des solutions usuelles pour des données initiales appartenant à un ensemble dense dans H . (iii) Dans les conditions du Théorème 6 la solution de l'équation (6) dépend continuellement dans H des données initiales (appartenant à H).

La démonstration du Théorème 7 est immédiate en utilisant les théorèmes 4, 5 et 6. En ce qui concerne l'équation différentielle (6) qui est satisfaite par la solution généralisée de l'équation (12) on ne peut rien dire a priori. Nous donnerons cependant un cas quand cette solution généralisée satisfait l'équation

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = A(\tau)\xi(\tau)$$

où la dérivation, pour chaque $\tau > c$ se fait dans la topologie faible de H et $\xi(\tau) \in \mathcal{D}_{A(\tau)}$.

Remarquons tout d'abord que dans l'équation (6) la dérivation sera faite aussi d'après la topologie faible de H si et seulement si pour chaque $\tau > c$ il y a un δ et un M tels que:

$$(13) \quad \left\| \frac{\xi(\tau + h) - \xi(\tau)}{h} \right\| \leq M(\tau), \quad |h| \leq \delta(\tau).$$

Dans la suite nous utiliserons le

LEMME 3. *La condition (13) implique que, pour chaque $\tau > c$*

$$\xi(\tau) \in \mathcal{D}_{A(\tau)}$$

Démonstration. En utilisant la remarque antérieure et le fait que H est reflexif, on trouve un élément $d\xi(\tau)/d\tau$ défini par la relation $\langle d\xi(\tau)/d\tau, Jx \rangle = d\langle \xi(\tau), Jx \rangle/d\tau$; $x'_\xi(\tau)$ étant une solution de l'équation (6), on obtient immédiatement

$$\left\langle \frac{d\xi(\tau)}{d\tau}, x \right\rangle = \langle \xi(\tau), A^*(\tau)x \rangle, \quad x \in H_n.$$

En utilisant les propriétés de E_n^* on trouve:

$$\left\langle \frac{d\xi(\tau)}{d\tau}, E_n^*x \right\rangle = \langle E_n\xi(\tau), A^*(\tau)x \rangle, \quad x \in \mathcal{D}_{A^*(\tau)},$$

d'où

$$\left\langle \frac{d\xi(\tau)}{d\tau}, x \right\rangle = \langle \xi(\tau), A^*(\tau)x \rangle, \quad x \in \mathcal{D}_{A^*(\tau)}.$$

Donc $\xi(\tau) \in \mathcal{D}_{A^{**}(\tau)}$ et $d\xi(\tau)/d\tau = A^{**}(\tau)\xi(\tau)$. Mais $A(\tau)$ est fermé, à domaine dense, etc. c.q.f.d.

Une condition effective est donnée par le

THÉORÈME 8. *Si l'on désigne par*

$$(1) \quad M_p = \max \|A(\tau)(E_{p+1} - E_p)\|, \quad \tau \in (a, b),$$

(2) $\sup \operatorname{Re} \langle A(\tau)x, x \rangle = \nu_p$ pour $\|x\| \leq 1$, $x \in (E_{p+1} - E_p)(H)$ et si on suppose que

$$(14) \quad \sum_{p=1}^{\infty} M_p e^{(\tau-c)\nu_p/2} < +\infty, \quad \tau \in (c, b)$$

alors la solution généralisée de l'équation (12) appartient pour chaque $\tau \in (c, b)$ à $\mathcal{D}_{A(\tau)}$ et la dérivée dans (12) est prise suivant la topologie faible de H .

Démonstration. En s'appuyant sur le fait que $A_n^{**}(\tau)$ est la restriction de

$A(\tau)E_n$ à H_n on peut obtenir que $\|(E_{p+1} - E_p)\xi_n(\tau)\| \leq e^{r_p p} \|(E_{p+1} - E_p)\xi_n(c)\| \leq e^{r_p p} 2M\|a\|$. Comme

$$(E_{p+1} - E_p) \left(\frac{\xi_n(\tau + h) - \xi_n(\tau)}{h} \right) = \frac{1}{h} \int_{\tau}^{\tau+h} A(s)(E_{p+1} - E_p)^2 \xi_n(s) ds$$

nous trouvons que

$$\left\| E_p \frac{\xi_n(\tau + h) - \xi_n(\tau)}{h} \right\| \leq \left(2 \sum_{k=1}^p M_k e^{r_k k/2} + 1 \right) M\|a\|$$

pour $|h| < \tau/2$ et $p > p(\tau)$. Faisons $n \rightarrow \infty$ et puis $p \rightarrow \infty$. En utilisant (14) on trouve (13). Le reste résulte du Lemma 3.

6. Pour illustrer les résultats des points antérieurs nous allons étudier maintenant deux cas particuliers.

Soit A un opérateur fermé, non borné, vérifiant la

CONDITION 1. Il existe une suite de courbes de Jordan C_n , tendant vers l'infini, situées dans l'ensemble résolvant de A et tel que les idempotents E_n attachés à chaque partie du spectre contenu à l'intérieur géométrique de C_n tendent vers I pour $n \rightarrow \infty$.

On voit (d'après Hille [6]) immédiatement que A et la famille $\{E_n\}$ vérifient les conditions 1, 2, 3 du Théorème 7. On voit ensuite que A vérifie les conditions du Théorème 3. Cela résulte directement du Lemma 4.

LEMMA 4. Si $K \subset H$ est un sous-espace invariant pour T (T satisfaisant la condition 1) et tel que T soit borné sur K , alors il y a un n tel que $K \subset E_n(H)$.

Démonstration. Soit σ le spectre de T considéré dans K ; il y a alors un n tel que $\sigma \subset \sigma_n = \text{Intérieur géométrique de } C_n \cap \sigma(T)$.

Montrons que pour un tel n on a $K \subset E_n(H)$ ce qui revient à $E_{\sigma'}(K) = \{0\}$ où $\sigma' = \sigma(T) \cap C\sigma_n$. On voit sans peine que $K_1 = E_{\sigma'}(K)$ est invariant pour T , que T est borné sur K_1 , et que le spectre de T considéré dans K_1 est situé dans σ' . D'autre part, si l'on pose $T(\lambda)(E_{\sigma'}x) = E_{\sigma'}R_K(\lambda; T)x$ pour $x \in K$ et $\lambda \notin \sigma$ où R_K est la résolvante de T considérée dans K , on a que si $E_{\sigma'}x = 0$ cela implique $T(\lambda)E_{\sigma'}x = 0$. Cela se voit du fait que $E_{\sigma'}R_K(\lambda; T)x$ est, pour $\lambda \in \rho(\tau)$ égale à $E_{\sigma'}R(\lambda; T)x = R(\lambda; T)E_{\sigma'}x = 0$ et comme $E_{\sigma'}R_K(\lambda; T)$ est analytique pour $\lambda \notin \sigma$ on a $T(\lambda)(E_{\sigma'}x) = 0$. Il s'ensuit que $T(\lambda)$ est un opérateur linéaire borné sur K_1 ; en raisonnant comme auparavant, on obtient que $T(\lambda)$ est la résolvante de T considéré dans K_1 et donc que le spectre de T considéré dans K_1 , est contenu dans $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$, d'où $E_{\sigma'}(K) = \{0\}$. c.q.f.d.

Soit maintenant un opérateur borné $B(\tau)$ continu en norme, permutable pour chaque τ avec A . Alors il est évident que l'opérateur $A(\tau) = B(\tau)A$ satisfait les propriétés 1, 2, 3. Si l'on suppose en outre que A satisfait la propriété 4 et que $B(\tau) \geq 0$ on voit que $A(\tau)$ vérifie aussi la propriété 4. Tous les résultats des points antérieurs s'appliquent à ces cas. On a donc le

THÉORÈME 9. (i) Si A est un opérateur qui satisfait la condition 1, et si $B(\tau)$ est un opérateur borné continu en norme, permutable avec A pour chaque $\tau \in (a, b)$ alors on peut plonger l'espace H dans un espace localement convexe métrisable et complet $\mathfrak{X}'$ tel que $B(\tau)A$ puisse être prolongé à un opérateur continu de $\mathfrak{X}'$ et tel que le problème de Cauchy pour l'équation

$$(15) \quad \frac{du}{d\tau} = B(\tau)Au$$

considérée dans $\mathfrak{X}'$, puisse se résoudre correctement.

(ii) Si A satisfait en outre la condition

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq \mu \|x\|^2$$

et $B(\tau) \geq 0$ alors, la solution de l'équation, considérée dans $\mathfrak{X}'$ est, pour des données initiales appartenant à H , la solution généralisée de l'équation (15) considérée dans H (cela pour des valeurs $\tau > c$ où c est le moment initial).

(iii) Si $B(\tau) \geq \gamma I > 0$ alors $\mathfrak{X}'$ a la situation spéciale du Théorème 3.

Les points (i) et (ii) sont immédiats. Si $A(\tau)$ est borné sur K , alors, comme $B(\tau)^{-1}$ permute avec $A(\tau)$ on a que A est borné sur K , d'où, en utilisant le Lemma 4, on voit que l'hypothèse du Théorème 3 sont vérifiées.

Un exemple plus significatif sera celui où A est un opérateur spectral non borné, du type scalaire [7]. On a dans ce cas le

THÉORÈME 10. Si A est un opérateur normal et $B(\tau)$ un opérateur borné continu en norme, permutable avec A , ($\tau \in (a, b)$), alors, le problème de Cauchy pour l'équation (15) peut être résolu correctement dans l'espace $\mathfrak{X}' \supset H$, $\mathfrak{X}'$ étant un espace localement convexe, métrisable et complet.

(ii) Si on suppose que le spectre de A est situé à gauche d'une droite parallèle à l'axe imaginaire⁽²⁾ et si $B(\tau) \geq 0$ la solution (pour des données initiales appartenant à H) est la solution généralisée de l'équation considérée dans H , le problème étant correctement posé aussi dans H .

(iii) Si le spectre de A est situé dans un angle $< \pi$, ayant comme bisectrice le demi axe réel négatif, et si $B(t) \geq rI$, $r > 0$, alors pour $\tau > c$ cette solution généralisée satisfait dans H l'équation

$$\frac{du}{d\tau} = B(\tau)Au,$$

la dérivation étant faite suivant la topologie faible de H .

Démonstration. (i) Il résulte immédiatement du fait que si E_n est le projecteur attaché à la portion du spectre de A situé dans le rectangle de centre 0 de côté n , la famille $\{E_n\}$ satisfait les conditions du Théorème 6 (on utilise un théorème de Fuglede [4]).

(2) $B(\tau) \geq 0$ signifie que $B(\tau)$ est un opérateur symétrique positif.

Pour (ii) on doit remarquer qu'on a $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq \mu \|x\|^2$, où $\sigma(A)$ est situé à gauche de la droite $\operatorname{Re} \lambda = \mu$; comme $B(\tau) \geq 0$ en considérant $B^{1/2}(\tau)$ on obtient pour l'opérateur $A(\tau) = B(\tau)A$ la condition 4 du Théorème 6.

En passant maintenant à (iii) il suffit de remarquer (en utilisant les notations du Théorème 8) que

$$M_p \leq B(p+1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

$$\nu_p \leq -pr$$

où $B = \max \|B(\tau)\|$, $\tau \in [c, b]$ et θ est la valeur de l'angle dans lequel est compris le spectre de A . La conclusion résulte du Théorème 8. Avant de finir, remarquons que la conclusion (iii) du Théorème (9) a lieu aussi dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces (F) et (LF)*, Ann. de l'Institut Fourier vol. I (1949) pp. 61–101.
2. J. v. Neumann, *Eine Spectraltheorie für allgemeine Operator en eines unitären Raumes*, Math. Nachrichten vol. 4 (1950–1951) pp. 258–281.
3. N. Dunford, *Spectral theory, I, Convergence to projections*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 54 (1943) pp. 185–217.
4. B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol. 36 (1950) pp. 35–40.
5. S. L. Sobolev, *Equations aux dérivées partielles*, Moscou, 1947 (en russe).
6. E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, New York, 1948.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, ACADEMIA R.P.R.,
BUCHAREST, RUMANIA